Ecole des Hautes Etudes Commerciales 1982

Mathématiques I (4 h)

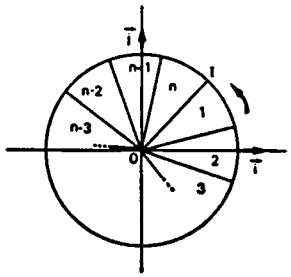
OPTION GENERALE

(La présentation, l'écriture et l'orthographe ont leur part dans la note. La première et la seconde partie sont indépendantes.)

Le symbole ln représente le logarithme népérien. On note $E(x)$ la partie entière de x, et $\bar{E}(x)$ la différence $x-E(x)$.

On désigne par n un entier naturel supérieur à 2 ($n \geqslant 2$) et par N un entier naturel non nul. On pose $h = \frac{2\pi}{n}$ et $x_0 = Nh$.

Une roue de loterie est schématisée par un disque D de centre 0 divisé en n secteurs égaux, mobile par rapport à un repère orthonormal direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$. Les secteurs sont numérotés de 1 à n dans le sens inverse du sens trigonométrique. Soit I le point du cercle limitant D tel que le segment $[0,I]$ sépare les secteurs de numéros 1 et n.



Une expérience aléatoire consiste à lancer la roue dans le sens trigonométrique. On suppose que lorsque celle-ci est arrêtée, la demi-droite $(0, \vec{i})$ ne rencontre qu'un seul secteur (dit gagnant) en des points autres que 0. On note X la variable aléatoire prenant pour valeur la mesure x en radians de l'angle total dont a tourné la roue avant de s'arrêter (x est donc une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OI})$ qui prend en compte les tours effectués par la roue). On suppose enfin que la variable aléatoire X possède une densité de probabilité f définie par: $f(t) = \exp(x_0 - t)$ si $t \geqslant x_0$, $f(t) = 0$ si $t < x_0$.

PREMIÈRE PARTIE

1°) a) Expliciter la fonction de répartition F de X et tracer son graphe. Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de X.

b) Soit q un élément de $\mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'événement $\{(q-1)h \leqslant X < qh\}$.

c) Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $\{X < qh\}$ sachant que l'événement $\{X \geqslant (q-1)h\}$ est réalisé.

2°) Soit Y la variable aléatoire prenant pour valeur le numéro du secteur gagnant.

a) Soit k un entier naturel. Montrer que la relation $nq + k > N$, où $q \in \mathbb{Z}$, équivaut à $q \geqslant 1 + E(\frac{N-k}{n})$.

b) Soit k un entier naturel appartenant à l'intervalle $[1,n]$. Montrer que la probabilité $P_n(k)$ de l'événement $\{Y = k\}$ est de la forme

$$P_n(k) = \beta\, \alpha^{\bar{E}(\frac{N-k}{n})},$$

où α est un nombre réel strictement supérieur à 1 et où β ne dépend que de n (et non de k).

On pourra admettre ce résultat pour la suite, les valeurs de α et de β n'intervenant pas dans le reste du problème.

3°) Soit r le reste de la division euclidienne de N par n ($0 \leqslant r \leqslant n-1$).

a) Expliciter $P_n(k)$ en fonction de α, β, n, r et k. (On notera que l'application $x \longmapsto \bar{E}(x)$ admet 1 pour période.)

b) Montrer que lorsque k décrit l'intervalle $[1,n]$ de $\mathbb{N}$, le nombre $E(\frac{r-k}{n})$ prend au plus deux valeurs, que l'on précisera.

c) On suppose dans cette question que $r = 0$. Simplifier l'expression de $P_n(k)$ et dresser le tableau de variation de l'application $k \longmapsto P_n(k)$. Montrer que le graphe de cette application est contenu dans celui d'une fonction exponentielle. Donner l'allure de ces graphes sur un même dessin.

d) On suppose que $r \neq 0$. Montrer que $E(\frac{r-k}{n})$ prend effectivement deux valeurs, et trouver les valeurs correspondantes de k. Simplifier alors $P_n(k)$, dresser le tableau de variation et donner l'allure du graphe de l'application $k \longmapsto P_n(k)$.

.../...

e) On ne fait plus d'hypothèse sur r. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par $P_n(k)$ lorsque k décrit l'intervalle $[1,n]$ de $\mathbb{N}$ est indépendant de r. En donner le plus grand et le plus petit élément.

4°) On suppose dans cette question que $r=0$. En calculant la somme $\sum_{k=1}^{n} P_n(k)$, exprimer β en fonction de α et de n.

Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y.

5°) Dans cette question, k et x_0 sont fixés, x_0 étant supposé non congru à 0 modulo 2π. On suppose que n varie dans l'intervalle $[k,+\infty[$ de $\mathbb{N}$.

a) Montrer que les rapports $\frac{N}{n}$ et $\frac{r}{n}$ sont constants, et que $r \geqslant k$ pour n assez grand.

b) En déduire, quand n tend vers l'infini, que $P_n(k)$ est équivalent à $\alpha^{r/n} \frac{\ln \alpha}{n(\alpha-1)}$.

SECONDE PARTIE

On fixe $n \geqslant 4$. Pour tout entier naturel k appartenant à $[1,n]$, on pose $p_k=P_n(k)$ et $a_k=p_{k-1}+p_k+p_{k+1}$, en convenant que $p_0=p_n$ et que $p_{n+1}=p_1$. Le secteur de numéro n est aussi numéroté 0, et le secteur de numéro 1 est aussi numéroté $n+1$.

La loterie est utilisée avec la règle de jeu suivante: avant l'expérience, le joueur mise sur un secteur de son choix; soit k le numéro de ce secteur; après l'expérience, il perçoit le double de sa mise si la roue s'est arrêtée sur le secteur k, il est remboursé si la roue s'est arrêtée sur le secteur $k-1$ ou sur le secteur $k+1$; il perd sa mise dans les $n-3$ autres cas.

Le joueur décide de tenter sa chance plusieurs fois consécutives, avec la méthode que voici: au premier coup, il mise sur un secteur choisi au hasard (les n choix sont équiprobables); si au m-ième coup (où $m \geqslant 1$) il a été remboursé ou s'il a doublé sa mise (on dit dans l'un et l'autre cas qu'il a gagné au m-ième coup), il mise au $(m+1)$-ième coup sur le même secteur qu'au m-ième coup; sinon (on dit alors qu'il a perdu au m-ième coup), il choisit au hasard l'un des autres secteurs (les $n-1$ choix sont équiprobables).

On suppose que les coups successifs constituent des expériences indépendantes et identiques. (En particulier, le point I de D est remis sur la demi-droite $\overrightarrow{(0,i)}$ après chaque expérience.)

On note $C_k(m)$ la probabilité de choisir le secteur k au m-ième coup, $G_k(m)$ la probabilité conditionnelle de gagner au m-ième coup quand on a misé sur le secteur k, et enfin $G(m)$ la probabilité de gagner au m-ième coup.

1°) Calculer les nombres $C_k(1)$, $G_k(1)$ et $G(1)$.

2°) Calculer $G_k(m)$ lorsque $m \geqslant 2$. En déduire que, pour tout entier naturel non nul m,

$$C_k(m+1)=a_k C_k(m)+\frac{1}{n-1} \sum_{\substack{i \neq k \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} (1-a_i)\, C_i(m).$$

3°) Pour tout entier naturel non nul m, on considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^n$:

$$C_m=\begin{pmatrix} C_1(m) \\ C_2(m) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ C_n(m) \end{pmatrix}, \qquad A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer une matrice carrée M d'ordre n à coefficients réels indépendants de m, telle que, pour tout entier naturel non nul m,

$$C_m=M^{m-1}C_1.$$

b) En déduire que $G(m)={}^tAM^{m-1}C_1$ (où ${}^tA$ désigne la transposée de A).

4°) On prend n assez grand pour que les nombres a_k, où $1 \leqslant k \leqslant n$, puissent être supposés égaux.

a) Calculer leur valeur commune.

b) Montrer qu'il existe un couple (λ,μ) de nombres réels tel que

$$M=\lambda I+\mu J,$$

où I désigne la matrice unité d'ordre n et J la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.

c) Pour tout entier naturel non nul q, calculer J^q. En déduire M^{m-1}.

d) Déterminer finalement la valeur de $G(m)$. Le résultat était-il prévisible?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail